OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A V-A

Subiecte

1. Găsiți toate numerele de trei cifre de forma $\overline{abc}$ pentru care $\overline{abc}+\overline{acb}=1165$

Prof. Crăciun Gheorghe, Ploiesti

2. a. Arătați că 10^2 se poate scrie ca suma a patru cuburi perfecte.

b. Determinați numerele naturale nenule m,n,p,q distincte, știind că $m^3+n^3+p^3+q^3=10^{2021}$.

Prof. Achim Gheorghe, Mizil

3. La un tur ciclist, traseul a fost parcurs în cinci zile astfel: în fiecare din cele 5 zile s-au parcurs $16\cdot n$ *km* și încă o treime din distanța ce a mai rămas după parcurgerea celor $16\cdot n$ *km* în acea zi, unde n reprezintă numărul zilei.

a. Aflați câți km s-au parcurs în a treia zi.

b. Aflați lungimea traseului parcurs.

Prof. Brabeceanu Ionel, Plopeni

4. Se consideră numărul $n=1+2+2^2+2^3+...+2^{2019}+2^{2020}+2^{2021}$.

a. Aflați restul împărțirii lui n la 21.

b. Aflați x din relația

$$\left(1+2+2^2+2^3+...+2^{2019}+2^{2020}+2^{2021}\right):\left(1+2^6+2^{12}+2^{18}...+2^{2016}\right)+x^5\cdot 64=2111$$

Prof.Negrilă Anton, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : *2 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A VI-A

Subiecte

1. Fie numerele raționale care satisfac egalitatea $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=2.$

Calculați $\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}$.

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

2. Determinați cardinalul mulțimii: $M=\left\{n\in\mathbb{N} / n=\overline{a2b}\ si\ \left(3^{n}+4\right)\vdots 13\right\}$.

Prof. Ionel Brabeceanu, Plopeni

3. În jurul punctului O se consideră unghiurile AOB, BOC, COD, DOE şi EOA, astfel încât OA şi OD sunt semidrepte opuse, $\sphericalangle BOC$ este un unghi drept, iar $3\cdot\sphericalangle DOE=2\cdot\sphericalangle AOE$. Ştiind că bisectoarea unghiului BOC formează cu OA un unghi de 70^{0}, aflaţi măsurile unghiurilor AOB, COD şi DOE.

***

4. Determinați numerele naturale *a,b,c* ştiind că a^{3},b^{2},c^{4} sunt invers proporționale cu numerele: $0,0625;\ 0,(3);\ 0,08(3)$ și $\frac{1}{72}a^{2}b^{3}=54c^{3}.$

Prof. Negrilă Anton, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : *2 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A VII-A

Subiecte

1. Determinaţi numărul natural *n* care verifică egalitatea:

$$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 17}+...+\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{2^{2019}-1}{3\cdot(2^{2020}+1)}$$

2. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A)=150^0$ și $m(\sphericalangle B)=10^0$. Fie $M\in[BC]$ astfel încât $[BM]\equiv[AC]$ și $N\in[AB]$ astfel încât $m(\sphericalangle ANC)=20^0$.

a) Arătaţi ca triunghiurile AMN și ABM sunt isoscele;
b) Dacă $AN=x, CN=y\ si\ AC=z$, aflaţi perimetrele triunghiurilor AMN şi ABC.

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

3. Determinați numerele prime p și q , p< q <100, astfel încât $\sqrt{2p^2+2q^2+52}=118\sqrt{2}$

Prof. Gabriel Țaga, *Gazeta matematică12/2018*

4. In triunghiul ABC, cu m(∠ A)=90^0, punctul M este mijlocul laturii (BC) , iar punctul P este situat pe latura (AC) astfel încât AC = 3·AP. Arătaţi că bisectoarea unghiului BPM este paralelă cu dreapta AB .

Prof. Gheorghe Bumbăcea , Buşteni

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A VIII-A

Subiecte

1. a. Descompuneți în factori n^4+4, unde $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

b. Arătați că numărul 390629 nu este număr prim.

Prof. Achim Gheorghe, Mizil

2. Determinați numerele reale x, y, z știind că $x^4+1\leq y^3+z$, $y^4+1\leq z^3+x$, $z^4+1\leq x^3+y$.

Prof. Petre Năchilă, Ploiești

3. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC, AB = AC =*a*, se duce perpendiculara AD = *b*.

Fie AP $\perp$ BD , $P \in BD$ și H proiecția lui A pe planul (BDC) ; demonstrați că :

a. Punctele C , H , P sunt coliniare

b. $\frac{1}{AH^2}=\frac{4}{BC^2}+\frac{1}{AD^2}$

Prof . Bilciurescu Ion , Boldești – Scăeni

4. Pe planul trapezului dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD, m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle D)=90^0$, $AC\perp BD$, $AB=32\text{cm}$, $CD=8\text{ cm}$ se ridică perpendiculara MP, unde $P\in(AD)$, $AP=PD$ și $MP=8\sqrt{3}$ cm.

a. Calculați distanța de la punctul *M* la dreapta BC.

b. Calculați măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (MAB) și (MCD).

c. Construiți distanța de la punctul P la planul (MBC) și aflați lungimea acesteia.

Prof.Negrilă Anton, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A IX-A

Subiecte

1. Arătați că, pentru orice n număr natural nenul, numărul $2^{2n-1}-(-2)^{n-1}-1$ se divide cu 9.

Gazeta matematică,nr.9/2018

2. Dacă a, b, c > 0, demonstrați că:

$$\frac{1}{abc+ab+ac}+\frac{1}{abc+ac+bc}+\frac{1}{abc+ab+bc}\leq\frac{6+a^2+b^2+c^2}{9abc}$$

Prof. Coman Vasile, Valenii de Munte

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{3x-1}{4}\right]=x$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului *a* .

Prof. Militaru Claudiu, Ploiești

4. Se consideră paralelogramul $ABCD$, $AC\cap BD=\{O\}$. Fie $E\in(AB)$ astfel încât $AE=k\cdot EB,\ k>0$, și G_1,G_2,G_3,G centrele de greutate ale triunghiurilor ADE, CDE, ECB respectiv $G_1G_2G_3$. Demonstrați că $G\in(AC)\cup(BD)-\{O\}\Leftrightarrow k\in\left\{2,\ \frac{1}{2}\right\}$.

Prof. Militaru Claudiu, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A X-A

Subiecte

1. Arătați că :

$$\log_a \frac{a+b+c}{3}+\log_b \frac{a+b+c}{3}+\log_c \frac{a+b+c}{3}\geq 3$$, pentru orice $a,b,c\in(1;\infty)$.

***

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$[\log_{16} x]+[\log_{16}(2x)]+[\log_{16}(4x)]+[\log_{16}(8x)]=\log_2 \frac{32}{\sqrt[4]{x}}$$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x.

elev Ducu Victor, Sinaia

3. Determinați $x,y,z\in\mathbb{C}^*$,știind că $x\cdot\left|y^2\right|=z^4$, $y\cdot\left|z^2\right|=x^4$, $z\cdot\left|x^2\right|=y^4$.

Prof. Petre Năchilă, Ploiești

4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a. $2^{\left[2^x\right]}+3^{\left[3^x\right]}=5^{\left[5^x\right]}$

b. $2^{2^{[x]}}+3^{3^{[x]}}=5^{5^{[x]}}$

Prof.Vasile Emil, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A XI-A

Subiecte

1. Calculaţi: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\ldots+(1^2+2^2+\ldots+n^2)}{1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3}$

2. Determinați matricele $A,B\in M_2(\mathbb{Q})$ care verifică relațiile :

$$A^2+2B^2=\begin{pmatrix}4 & -4\\ -2 & 2\end{pmatrix} \text{ și } AB+BA=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Prof. Gabriel Necula, Breaza

3. Fie matricele $A,B\in M_2(\mathbb{Z})$ cu proprietățile $AB=BA$ și $\det A=\det B=\frac{1}{4}\det\left(A^2+B^2\right)=1$. Arătați că 4 divide numerele $\det\left(A^{2019}+B^{2019}\right)$ și $\det\left(A^{2019}-B^{2019}\right)$.

Prof. Octavian Purcaru, Ploiești

4. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1=x_2=1,\ x_{n+1}=x_1+\frac{x_1x_2}{2!}+\ldots+\frac{x_1\ldots x_n}{n!}$, oricare ar fi $n\geq 2$.

a) Arătaţi că $x_1\ldots x_n\leq\frac{n!}{2^{n-1}}$;

b) Arătaţi că sirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are limita *a* şi $a<2$;

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{n!}{2^n}}$

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A XII-A

Subiecte

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea: $f(x)+f(-x)=x^2+2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Calculați: $I=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{x^4+4}dx$

Prof. Roxana Soare, Ploiești

2. Fie $G=(1,3)$ şi pentru orice $x,y\in G$ definim legea $x*y=\frac{2xy-3x-3y+6}{xy-2x-2y+5}$.

a)Arataţi că G este parte stabilă în raport cu legea "$*$";

b)Presupunând că $(G,*)$ este grup abelian, arataţi că $(G,*)\cong(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

3. Fie $(G,\circ)$ un grup finit. Notăm cu $O(G)=\{n\in\mathbb{N}^*\,/\,\exists x\in G \text{ cu } ord\, x=n\}$.

a) Găsiţi grupurile G_1 abelian şi G_2 neabelian astfel încât $\{1,2,3,4,5,6\}\subset O(G_1)$, respectiv $\{1,2,3,4,5,6\}\subset O(G_2)$;

b) Există G abelian cu $O(G)=\{1,3,5\}$? Dar G neabelian cu $O(G)=\{1,3\}$?

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

4. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x t^2 e^{\frac{(x-t)(x+t)}{x^2}}dt,\ x\neq 0,\ f(0)=0$ și $g:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{f(x)}{x^4(1+x^{2019})}$.

Arătați că:

a) f este o funcție impară și continuă;

b) Orice primitivă G a funcției g admite asimptotă orizontală.

Prof. Octavian Purcaru, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.