OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2020 –

CLASA A V-A

Subiecte

1. Tatăl are cu 5 ani mai putin decât mama și fiul la un loc. Peste 7 ani, fiul va avea a 3-a parte din vârsta mamei, iar toți trei vor avea împreună 108 ani. Ce vârsta are fiecare acum?

Gazeta Matematică- supliment

2. **a)**Arătați că 26 și 26^2 se pot scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule.

b)Demonstrați că pentru orice *n* număr natural nenul, numărul 26^n se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule.

Prof. Petre Năchilă, Ploiești

3. Se consideră numărul natural n = 8a + 24b - 4, unde $a=1+3^2+3^4+3^6+...+3^{2020}$ şi $b=1+5^2+5^4+5^6+...+5^{2020}$. Stabiliți dacă numărul natural *n* este pătrat perfect.

Prof. Negrilă Anton, Ploiești

4. Determinați numerele naturale n, respectiv $\overline{abc}$, ştiind că $9\cdot\left(2^a+\overline{bc}\right)+4^n=2020$

Prof. Achim Gheorghe, Mizil

Notă:

Timp de lucru : *2 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2020 –

CLASA A VI-A

Subiecte

1. Se consideră mulţimile :

$A = \{24n + 13 | n \in \mathbb{N}\}$ şi $B = \{30m + 19 | m \in \mathbb{N}\}$

a) Arătați că $61 \in A$, $79 \in B$ și $109 \in A \cap B$;

b) Determinați cardinalul mulţimii $C = \{\overline{abcd} \mid \overline{abcd} \in A \cap B\}$.

Prof. Roxana Soare, Ploiești

2. Determinați numerele naturale nenule a, b, c știind că numerele a^5, b^4 și c^3 sunt invers proporționale cu numerele 0,08(3) și 0,03125 respectiv 0,(1) și că este îndeplinită condiția $0,0625 \cdot a^4 \cdot b^6 = 128 \cdot c^5$

Prof. Anton Negrilă, Ploiești

3. Determinați exponentul lui 2 din descompunerea în factori a numărului $1011 \cdot 1012 \cdot ... \cdot 2019 \cdot 2020$.

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

4. În interiorul unghiului AOB se ia punctul N. Se duce bisectoarea OS a unghiului AON . În interiorul unghiului NOB se ia punctul M și se duce bisectoarea OT a unghiului $\sphericalangle MOB$. Se știe că măsura unghiului SOT este egală cu 52^0 și că $\frac{\sphericalangle AON}{\sphericalangle MOB} = 8; \frac{\sphericalangle AOM}{\sphericalangle NOB} = \frac{10}{3}$.Calculați măsura suplementului unghiului AOB.

Prof. Ioana Crăciun ,prof. Gheorghe Craciun, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : *2 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2020 –

CLASA A VII-A

Subiecte

1. Se consideră mulțimea $A=\left\{\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3},...,\frac{1}{2019\cdot 2020}\right\}$.Arătați că pentru orice submulțime B inclusă în A, suma elementelor lui B nu este număr natural.

***

2. Determinați numerele raționale x și y pentru care $\frac{x}{\sqrt{13-2\sqrt{30}}}+\frac{y}{\sqrt{13+2\sqrt{30}}}=\sqrt{10}-3\sqrt{3}$.

Prof.Anton Negrilă, Ploiești

3. Pe un cerc cu centrul în O se consideră punctele A, B și C cu arcele AB și AC având fiecare măsura de 100°, iar punctul M aparține segmentului AB astfel încât măsura unghiului ACM este de 20°.Aflați măsura unghiului CMO.

Prof.Ionel Brabeceanu, Plopeni

4. În triunghiul echilateral ABC punctul P este situat pe bisectoarea unghiului ACB astfel încât ∢PAB = 15^o, iar punctul M aparține laturii AB astfel ca ∢PMA = 30^o . Arătați că că MP + PC = BC.

Prof . Gheorghe Bumbăcea, Bușteni

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2020 –

CLASA A VIII-A

Subiecte

1. a) Arătați că $\sqrt{AB} \le \frac{A+B}{2}$, $A,B \ge 0$

b)Determinați numerele pozitive $x,\ y,\ z,\ t$ dacă $x+y+z=6$ și

$\sqrt{txy-xz}$ + $\sqrt{tyz-xy}$ + $\sqrt{txz-yz}$ $=3t$.

Prof. Militaru Claudiu, Ploiești

2. Fie numerele reale x și y care verifică relațiile:

$x+5y-1=0$ și $x \in [6, 11]$.

Demonstrați că numărul:

$a=\sqrt{x^2+y^2-12x+2y+37}+\sqrt{x^2+y^2-22x+4y+125}$ este număr irațional.

***

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu latura $AB=6\sqrt{2}\ cm$ și punctele M si N mijloacele laturilor $C'D'$ respectiv AD. Știind ca $A'C' \cap B'D' = \{P\}$, calculați:

a)măsura unghiului format de dreptele BC' si $B'D$.
b)distanța de la M la dreapta BN.
c)tangenta unghiului format de planele (PCD) si (PBD).

Prof. Negrilă Anton, Ploiești

4. Fie tetraedrul ABCD cu $DA \perp (ABC)$, $AD=a,\ m(\measuredangle DBA)=30^0$, $m(\measuredangle ACD)=45^0$, $m(\measuredangle BDC)=90^0$.

a) Demonstrați că triunghiul ABC este obtuzunghic.
b) Determinați distanța de la A la planul (BDC).

Prof. Petre Năchilă, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2020 –

CLASA A IX-A

Subiecte

1. $a)$ Se consideră numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in (0, +\infty)$. Demonstrați că:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} .$$

$b)$ Determinați numerele reale pozitive x, y, z, t care verifică relația :

$$\frac{2xy+3x+6y}{x^2+4y^2+9}=\frac{(2y+z)^2}{2z+1}+\frac{(2z+1)^2}{2y+t}+\frac{(y+t)^2}{y+z}-3(y+z)-t .$$

Prof. Gabriel Necula, Breaza

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n=\left[\sqrt{n^2-5n+10}\right]$,unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x .Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, știind că $a_1+a_2+...+a_n=2025$.

Prof. Octavian Purcaru , Ploiești

3. Se consideră triunghiul ABC ascuțitunghic și H ortocentrul triunghiului . Fie *D* și *E* punctele de intersecție dintre BH respectiv CH și cercul circumscris triunghiului. Arătați că dacă $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ este coliniar cu $\overrightarrow{AH}$, atunci triunghiul ABC este isoscel .

Prof. Claudiu Militaru, Ploiești

4. În triunghiul *ABC* avem *AB*=*AC*. Punctele *D* și *E* împart baza *BC* în trei părți egale,iar punctul $I \in (AB)$ astfel încât *AI*=6*BI*. O dreaptă *d* ce conține punctul I intersectează (AD),(AE),respectiv (AC) în punctele H,G respectiv F. Știind că AG=HD, calculați $\frac{AF}{FC}$.

Prof. Emil Vasile, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2020 –

CLASA A X-A

Subiecte

1. Se consideră numerele reale $a=\sqrt[3]{\frac{27+\sqrt{717}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{27-\sqrt{717}}{18}}$ și $b=\sqrt[3]{\frac{27+\sqrt{717}}{18}}-\sqrt[3]{\frac{27-\sqrt{717}}{18}}$.

a. Arătați că numerele $3\left(a^2-b^2\right)$ și a^3-a sunt numere naturale.

b. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^3-x-3=0$.

Prof.Cezar Apostolescu, Ploiești

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$14(1+4^x+9^x)=(1+2\cdot 2^x+3\cdot 3^x)^2$$

Prof. Mihaiela Doinaru , prof. Răzvan Laiu, Sinaia

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$(3x+2)\sqrt{9x^2+12x+2024}+(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+2029}=0.$$

Prof. Petre Năchilă, Ploiești

4. Fie funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ cu proprietatea $f(iz)=3\cdot\overline{z}+2i\cdot f(z), \forall z\in\mathbb{C}$. Demonstrați că f este bijectivă.

Prof. Claudiu Militaru, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2020 –

CLASA A XI-A

Subiecte

1. Calculați limita : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{x^2}{3}+1}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}+1}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{\frac{x^2}{n+1}+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)$, $n\in\mathbf{N}^*$.

Prof. Necula Gabriel, Breaza

2. Se consideră matricea $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&1\\1&1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3&5\\2&9&5\\2&3&25\end{pmatrix}$.

a)Determinați matricea A;

b)Calculați A^n, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Prof. Apostolescu Cezar, Ploiești

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq1}$, $x_{n+1}=\sin x_n-\cos x_n+\frac{\pi}{4}$, $\forall n\geq1$, $x_1=0$. Demonstraţi că şirul este convergent şi că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6})$.

Prof. Militaru Claudiu, Ploiești

4. Se dă șirul $(a_n)_{n\geq1}$, $a_1=\alpha$, $\alpha\in(0,1)$ și $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$, $n\geq1$.Definim șirul:

$$(b_n)_{n\geq1},\ b_n=\begin{vmatrix}1&1&1\\a_n&a_{n+1}&a_{n+2}\\a_{n+3}&a_{n+4}&a_{n+5}\end{vmatrix},\ n\geq1.$$

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}n^kb_n$, $k\in\mathbb{N}^*$

Prof. Emil Vasile, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2020 –

CLASA A XII-A

Subiecte

1. Calculați: $\int_1^e \frac{\ln(x^3 e^{5x+2})}{\ln(x^x e^{x^2})} dx$

Prof. Doinaru Mihaiela, Sinaia
Prof. Laiu Răzvan, Sinaia

2. Fie G un grup multiplicativ format cu matrice nesingulare din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in G \; si \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

a)Arătați că $(G,\cdot)$ este grup neabelian;
b)Determinați grupul G finit, de ordin minim, având proprietatea din enunț.

Prof. Apostolescu Cezar, Ploiești

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă care verifică relația: $f^n(x)+2f(x)=3x$, oricare ar fi x număr real și *n* număr natural impar. Arătați că: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{2n+1}{3(n+1)}$.

Prof. Octavian Purcaru, Ploiești

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian finit, de element neutru e, si functia $f:G\to G,\ f(x)=x^2$.

a)Dacă f este surjectivă, arătati că produsul elementelor grupului $(G,\cdot)$ este egal cu e;
b)Dati exemplu concret de un grup $(G,\cdot)$ in condițiile problemei având produsul elementelor egal cu e, pentru care f nu este surjectivă;
c)Dacă f este injectivă, aratati ca produsul elementelor multimii $\mathrm{Im}(f)$ este egal cu e.

Prof. Apostolescu Cezar, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.