OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 20.01.2018 –

CLASA A V-A

Subiecte

1. Știind că $\overline{ag}+\overline{mc}=107$, respectiv $\overline{he}+\overline{hi}=113$, calculați valoarea sumei $\overline{achi}+\overline{mghe}$.

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

2. Considerăm numerele naturale: $a=10^{2018}-9\cdot10^{2017}-9\cdot10^{2016}-9\cdot10^{2015}-...-9\cdot10^{86}$ și $b=5^{9}\cdot25^{2}\cdot125^{5}\cdot625^{14}\cdot(2^{87}+2^{86}+2^{85}+2^{84})$.

a.Comparați numerele *a* și *b;*

b.Determinați ultimele 255 de cifre ale numărului $n=(a+b)^{3}$;

c.Determinați restul împărțirii numărului *a* la *b*.

Prof. Anton Negrilă, Ploiești

3. Un elev are o sumă de bani pe care o cheltuiește în trei zile. În prima zi cheltuiește o treime din sumă și încă 4 lei. În a doua zi cheltuiește o pătrime din rest și încă 5 lei, iar în a treia zi restul de 16 lei. Aflați ce sumă de bani a avut elevul.

***

4. Într-o cutie sunt 28 bile numerotate de la 1 la 28. Două bile se numesc prietene dacă restul împărţirii celor două numere înscrise pe ele este egal cu zero. Care este numărul maxim de perechi de bile care sunt prietene? Justificaţi răspunsul.

Prof. Crăciun Gheorghe, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *2 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 20.01.2018 –

CLASA A VI-A

Subiecte

1. Numerele 20192102 și 20182097 împărțite la același număr de trei cifre dau resturile 83, respectiv 79. Determinați împărțitorul.

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

2. Determinați perechile de numere naturale nenule a,b cu $a<b$ pentru care: $[a,b]-(a,b)=74$, unde (a,b) este c.m.m.d.c și $[a,b]$ este c.m.m.m.c al numerelor a și b .

Prof. Anton Negrilă, Ploiești

3. În interiorul $\measuredangle AOB$ având măsura de 108°, considerăm punctul P și notăm

a° = m ($\measuredangle AOP$) , b° = m ($\measuredangle$BOP) .

a.Aflați a și b , dacă 17 a – 19 b = 18°

b.Fie M ∈ Int ($\measuredangle AOP$) , N ∈ Int ($\measuredangle POB$) astfel încât:

$$m(\measuredangle BOM) = 5\,m(\measuredangle AOM),\ \ m(\measuredangle BON) = \frac{1}{5}\,m\measuredangle AON)$$

Arătați că $\measuredangle AOB\ si\ \measuredangle MON$ au aceeași bisectoare .

Prof. Bilciurescu Ion, Boldești-Scăeni

4 **a.**Determinați numărul de divizori ai lui 2018.

b.Se consideră mulţimea $A=\left\{\frac{4035}{2017},\frac{4033}{2015},\ldots,\frac{2025}{7},\frac{2023}{5},\frac{2021}{3}\right\}$. Determinați $A\cap\mathbb{N}$.

Prof. Roxana Soare, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *2 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 20.01.2018 –

CLASA A VII-A

Subiecte

1. Rezolvați în mulţimea numerelor raţionale ecuaţia:

$$\frac{x}{2}+\frac{x+2}{4}+\frac{x+4}{6}+\cdots+\frac{x+2016}{2018}=\frac{x+1}{3}+\frac{x+3}{5}+\frac{x+5}{7}+\cdots+\frac{x+2017}{2019}.$$

prof.Soare Roxana, Ploiești

2. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ .Dacă $x+7y+13z=300$ și $x+8y+15z=335$,aflați valoarea sumei $x+y+z$.

prof.Gheorghe Achim, Mizil

3. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care înălțimea AD și mediana BM au aceleași lungimi ($D \in BC$, $M \in AC$) , iar $\{G\}=AD \cap BM$. Arătați că GM = AG – GD .

prof . Gheorghe Bumbăcea , Bușteni

4. Fie trapezul *ABCD* cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, şi punctele $T \in (DC)$, $AT \perp CD$, *M* -mijlocul lui $[AC]$. Dacă $MT \parallel BD$, demonstraţi că *ABCD* este trapez isoscel .

prof. Militaru Claudiu,Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 20.01.2018 –

CLASA A VIII-A

Subiecte

1. a. Fie $a,b,x\in\mathbb{R}$ cu $a\le x\le b$. Demonstrați că $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.

b. Fie numerele $x_i\in[-1;3]$, $i\in\{1,2,...,20\}$ cu $x_1+x_2+...+x_{20}=0$.
Arătați că $x_1^2+x_2^2+...+x_{20}^2\le 60$.

prof. Petre Năchilă,Ploiești

2. Determinați numerele naturale nenule n cu proprietatea că n^2+8n+4 se poate scrie ca produs de patru numere naturale consecutive.

prof. Soare Roxana,Ploiești

3. Fie tetraedrul $ABCD$ și G_A,G_B,G_C,G_D centrele de greutate ale fețelor $(BCD),(ACD),(ABD),(ABC)$.

a. Aflați valoarea raportului $\frac{GA}{GG_A}$, unde $AG_A\cap BG_B=\{G\}$.

b. Demonstrați că dreptele AG_A, BG_B, CG_C, DG_D sunt concurente în G.

***

4. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, iar punctul P mijlocul muchiei $A'B'$.

a. Determinați distanța de la punctul A la planul (BPD).

b. Știind că $AB=6\sqrt{2}\ cm$, $BC=6\ cm$ și $AA'=6\sqrt{3}\ cm$, calculați lungimea distanței de la punctul A la planul (BPD).

prof. Anton Negrilă,Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 20.01.2018 –

CLASA A IX-A

Subiecte

1. Determinați numerele reale pozitive x, y, z care verifică relația :

$$\frac{1}{[x]+\{y\}}+\frac{1}{[y]+\{z\}}+\frac{1}{[z]+\{x\}}=\frac{9}{x+y+z}.$$

prof. Gabriel Necula ,Breaza

2. Fie a,b,c,d numere reale astfel incat $0<a<b<c<d \; si \; b+c<a+d$.

a. Arătați că $b+c-a<\frac{bc}{a}<\frac{(b+c)^2}{4a}$;

b.Ordonați crescator numerele $A=\sqrt{ad}$, $B=\sqrt{bc}$, $C=\frac{b+c}{2}$, $D=\frac{a+d}{2}$.

prof. Cezar Apostolescu,Ploiești

3. Se consideră $ABCD$ un patrulater convex și M,N,P mijloacele laturilor $[AB]$,$[BC]$, respectiv$[CD]$

Fie Q mijlocul lui $[MP]$, E mijlocul lui $[AQ]$ și F mijlocul lui $[EN]$.

Arătați că:

a. $4\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$;

b. Punctele D,Q,F sunt coliniare.

***

4. Se consideră triunghiul ABC cu $AB<AC$ și punctele *T* și *M* astfel încât $\overrightarrow{TC}=2\overrightarrow{BT}$ și $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$. Bisectoarea unghiului *ABC* taie *AM* în *D* și *AC* în *E* . Arătați că dreptele *AB*, *TD* și *ME* sunt concurente.

prof. Claudiu Militaru,Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 20.01.2018 –

CLASA A X-A

Subiecte

1. Rezolvați ecuația:

$$2018^{x^2-2019x}+\frac{x^2-2019x}{2018^x}=1$$

prof.Vasile Coman , Vălenii de Munte

2. Determinați $x,y,z\geq 0$ știind că $x+y+z=1$ și $S\geq 2$, unde $S=\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}$.

prof. Petre Năchilă,Ploiești

3. Fie $z\in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$ astfel încât $z+\frac{1}{z+i}=1-i$. Calculați partea întreaga a numărului

$$\left|(z+1+i)^{10}+\frac{1}{(z+1+i)^{10}}\right|.$$

prof. Cezar Apostolescu,Ploiești

4. **a**. Fie $x,y\in\mathbb{C}^*$ astfel încât $|x|=|y|=\frac{x+y}{2}$.Demonstrați că $x=y$.

b.Fie $a,b,c\in\mathbb{C}^*$ astfel încât $|a+2b+3c|=|2a+3b+c|=|3a+b+2c|=2(a+b+c)$.Demonstrați că $a=b=c$.

prof. Emil Vasile, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 20.01.2018 –

CLASA A XI-A

Subiecte

1. Se consideră șirul $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}, n \geq 1$.

a. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

b. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot (1 - x_n)$.

Prof. Cezar Apostolescu, Ploiești

2. **a**.Arătați că șirul $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ are limita ∞ .

b.Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ $a_n = \frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + ... + \left[\frac{n}{n}\right]\right)$. Arătați că șirul a_n nu e monoton, dar are limită.

Prof. Mircea Octavian Purcaru, Ploiești

3. **a.**Fie $A \in M_2(\mathbb{Z})$ astfel încât TrA este număr par. Arătați că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ avem $Tr\, A^n$ este număr par.

b.Fie $T \in M_3(\{1,2,3\})$.Calculați $\sum\limits_{A\in T} \det A$ și $\sum\limits_{A\in T} \det A \cdot S(A)$ (unde $S(X)$ este suma elementelor matricei X)

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

4. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{Z}), A \neq 0_n$ și funcția $f : M_n(\mathbb{Z}) \to M_n(\mathbb{Z})$, $f(X) = AX + B$, care îndeplinește condițiile $f(B) = A$ și $(f \circ f)(A^*) = 0_n$. Arătați că funcția f este bijectivă.

(matricea A^* reprezintă matricea adjunctă a matricei A)

Prof. Gabriel Necula, Breaza

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 20.01.2018 –

CLASA A XII-A

Subiecte

1. Calculaţi: $I = \int_0^{1/4} \frac{\sin 2\pi x + x}{4\sin 2\pi x + 4\cos 2\pi x + 1} dx$

Prof. Claudiu Militaru, Ploiești

2. Pe multimea $G = (0,1)$ se defineste legea de compozitie $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$.

a. Arătați că $f : G \to (0,\infty),\ f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ este izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(R_+^*, \cdot)$;

b. Fie $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ si $x_1', x_2', ..., x_n'$ repectiv simetricele elementelor $x_1, x_2, ..., x_n$ in grupul $(G,*)$. Arătați că $x_1 * x_2 * .... * x_n + x_1' * x_2' * .... * x_n' = 1$.

Prof. Cezar Apostolescu, Ploiești

3. Fie $G = \{ f : [0,1] \to [0,1] / \ f \ bijectivă \ si \ continuă \}$ și $H = \{ f \in G / \ f \ strict \ crescătoare \}$

Arătați că:

a. $(G, \circ)$ grup.

b. Pentru oricare $f, g \in H \Rightarrow \sqrt{fg} \in H,\ \dfrac{f+g}{2} \in H$

c. Găsiți $f \in G$ cu $\int_0^1 \left(f(x) + f^2(x) + ... + f^{10}(x) \right) dx > 9,9$

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

4. Arătați că orice funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea $f\left(\dfrac{1}{x}\right) \ge x$, pentru orice $x > 0$, nu admite primitive.

***

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.