OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A V-A

Subiecte

1. Arătaţi că numărul $A = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2017 + 2017 + 2017^2 + \ldots + 2017^{2017}$ nu este pătrat perfect.

Prof. Tomescu Ion, Mizil și Lupea Ion, Ploiești

2. a. Calculați: $44^2 + 9^2$;

b. Scrieți numărul 2017^{2017} ca o sumă de două pătrate perfecte.

Prof. Gheorghe Crăciun, Ploiești

3. Considerăm mulțimea $A = \{3^m \cdot 5^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m \le 50, n \le 50\}$.

a. Determinați cardinalul mulțimii *A*.

b. Demonstrați că orice submulțime *P* a mulțimii A cu 5 elemente conține cel puțin două elemente distincte, al căror produs este pătrat perfect.

Prof. Anton Negrilă, Ploiești

4. Se consideră mulţimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} | x = 9^{2k+1} + 3^{4k+1} + 1, k \in \mathbb{N}\}$ şi $B = \{y \in \mathbb{N} | y = 8^{2p+1} + 8^{2p}, p \in \mathbb{N}\}$.

a. Arătaţi că $973 \in A$ şi $576 \in B$.

b. Determinați $A \cap B$.

Prof. Roxana Soare, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *2 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A VI-A

Subiecte

1. Dacă împărțim un număr de trei cifre la răsturnatul său , obținem câtul 6 și restul 47. Aflați numărul știind că diferența dintre numărul căutat și răsturnatul său este un număr natural cu exact 24 divizori.

prof Gheorghe Achim, Mizil

2. **a**. Fie p număr prim mai mare ca 5. Arătați că ultima cifră a pătratului său poate fi doar 1 sau 9.

b. Determinați numărul prim p, știind că $p^2 = \overline{xyzt}$ și $x+t=y$ iar $z=2y$.

prof Țaga Gabriel, Ploiești

3. Demonstrați că fracția $F=\dfrac{5^{n+1}\cdot 11^n+8}{5^n\cdot 11^{n+1}+16}$ este ireductibilă , pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

prof. Anton Negrilă, Ploiești

4. Fie u_1 , u_2 , ….., u_n unghiuri în jurul unui punct O , oricare două consecutive fiind complementare .

a. Arătați că n = 8.

b. Aflați măsurile celor opt unghiuri , știind că printre ele se află un unghi de $20^0 17'$.

prof. Bilciurescu Ion, Boldești - Scăeni

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *2 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A VII-A

Subiecte

1. Se consideră numerele reale a, b, c pentru care au loc egalitățile:
$ab(a+b+c)=13$, $bc(a+b+c)=39$, $ac(a+b+c)=117$.
Calculați valoarea produsului abc.

prof. Anton Negrilă, Ploiești

2. Determinați mulțimea $A=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{3\sqrt{n}-5\sqrt{2}}{\sqrt{n}+\sqrt{2}}\in\mathbb{Z}\right\}$.

prof. Petre Năchilă, Ploiești

3. Se consideră patrulaterul ABCD cu $\angle$ BCD = 90^0. Paralela prin B la DC este bisectoarea unghiului ABD și intersectează dreapta AD în punctul M.

Arătați că $\frac{BM}{DC}=\frac{2AB}{AB+BD}$.

prof. Gh. Bumbăcea, Bușteni

4. În ΔABC, bisectoarea (AD) a unghiului BAC, $D\in(BC)$, are aceeaşi lungime cu latura $[AC]$, $m(C)=2m(A)$ iar bisectoarea $\sphericalangle ABC$ intersectează AD în I.

a. Aflaţi măsurile unghiurilor ΔABC;

b. Demonstraţi că $AB=BC+CI$.

prof. Silvia Brabeceanu şi Ionel Brabeceanu, Plopeni

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A VIII-A

Subiecte

1. Arătaţi că numărul $A=\sqrt{2007\cdot 2009\cdot 2015\cdot 2017+64}\in\mathbb{N}$.

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

2. **a.** Fie $a,b,x,y\in(0,\infty)$ cu $a+b>1$. Demonstrați că $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}>\frac{1}{ax+by}$.

b. Fie $x>0, y>0$. Demonstrați că $5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)>\left(\frac{1}{2x+3y}+\frac{1}{3x+2y}\right)$.

Prof. Petre Năchilă, Ploiești

3. Fie pătratul ABCD de latură *a* și paralelogramul BCEF , B fiind mijlocul segmentului [AE]. Construim MF ⊥ (BEC) , MF = 2a .

a. Calculați CQ, unde Q este punctul de intersecție al dreptelor BC și AF;

b. Demonstrați că OQ ∥ (MCF) , O fiind centrul pătratului;

c. Aflați A_{BCEF} , dacă d (M , AC) = $\sqrt{17}$.

Prof. Bilciurescu Ion, Boldești-Scăeni

4. Fie rombul ABCD cu $BD=a\sqrt{3}$, $AC=a\sqrt{5}$ și $M\notin(ABC)$, astfel încât $MA=MB=MD=a$. Aflați distanța de la punctul C la planul (MAB).

Prof. Tomescu Ion, Mizil și Lupea Ion, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A IX-A

Subiecte

1. Demonstrați inegalitatea

$$\frac{yz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)}}+\frac{zx}{\sqrt{\left(y^2+z^2\right)\left(y^2+x^2\right)}}+\frac{xy}{\sqrt{\left(z^2+x^2\right)\left(z^2+y^2\right)}}\le\frac{3}{2}$$, oricare ar fi $x,y,z>0$.

***

2. Fie $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$ și ecuația $\{x\}+\{2x\}+...+\{nx\}=n-1, x\in\mathbb{R}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a lui x.

a. Demonstrați că ecuația nu are soluții iraționale.
b. Arătați că ecuația are o infinitate de soluții.
c. Pentru $n=4$,aflați câte soluții are ecuația dată în intervalul $[0;2017]$.

prof Emil Vasile, Ploiești

3. Fie triunghiul ABC și punctele $M\in(AB), N\in(AC)$ astfel încât $BM=CN=x$ .Fie E și F mijloacele segmentelor $[MN]$ și $[BC]$ și $[AD$ bisectoarea unghiului BAC .

a. Demonstrați că $EF \parallel AD$.

b. Determinați x astfel încât $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

prof. Petre Năchilă, Ploiești

4. Se consideră patrulaterul *ABCD* şi punctele *E*, *F*, *G* astfel încât $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{EG}$. Dacă punctele *F*, *E*, *B* și respectiv *D*, *G*, *B* sunt coliniare, arătați că *ABCD* este paralelogram .

prof. Militaru Claudiu, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A X-A

Subiecte

1. **a.** Demonstrați că $5^{\log_3 2} = 2^{\log_3 5}$.

b. Rezolvați ecuația $x^{\log_{2017}(x-1)} + 2017(x-1)^{\log_{2017} x} = 2018x^2,\ x > 1$.

prof. Vasile Coman, Valenii de Munte

2. **a**. Demonstrați că $\log_5\left(4^x + 3^x\right) < x$, pentru orice x real, cu $x > 2$.

b. Rezolvaţi în N^* ecuaţia: $\log_5\left(4^x + 3^x\right) = 2 \cdot \log_3\left(2^x - 1\right)$.

prof. Claudiu Militaru, Ploiești

3. Fie $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \le 2$. Arătați că $\left|z + \frac{1}{z}\right| \le 2$.

***

4. Fie $z \in \mathbb{C} / \mathbb{R}, |z| = 1, \operatorname{Re}(z) < 0$ și funcția $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N},\ f(n) = \left[\left|1\text{-nz}\right|\right]$,oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

a. Rezolvați ecuația : $x^2 + x \cdot f(1) + f(2) = 0,\ x \in \mathbb{C}$.

b. Studiați injectivitatea funcției $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}, g(n) = \left|1 + \left(\frac{i}{2}\right)^{f(1)} + \left(\frac{i}{2}\right)^{f(2)} + \ldots + \left(\frac{i}{2}\right)^{f(n)}\right|$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

prof. Emil Vasile, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A XI-A

Subiecte

1. Aflați $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{an^3+bn^2+1}-\log_5\left(3^n+4^n+5^n\right)-\sqrt[4]{n^4+4}\right)=1$.

Prof. Claudiu Militaru, Ploiești

2. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_{n+1}=a_n-a_n^2+a_n^3-a_n^4+a_n^5$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Știind că $a_1\in(0;1)$, demonstraţi că este convergent și calculați limita lui.

Prof. Vasile Coman, Valenii de Munte

3. Fie A o matrice de ordinul doi cu elemente reale si ${}^tA$ matricea transpusă. Ştiind că $\det(A+{}^tA)=8$ si $\det(A+2\cdot{}^tA)=27$, calculați $\det A$.

***

4. **a.** Fie matricea $A\in M_2(\mathbb{R})$, $A\neq 0_2$ și $rang\, A=1$. Rezolvați în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3=A$.

b. Determinați matricele $X,Y\in M_2(\mathbb{R})$ care verifică relațiile :

$$X\left(X^2+Y^2\right)+Y\left(XY+YX\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 3 & -6\end{pmatrix} \text{ și } X\left(XY+YX\right)+Y\left(X^2+Y^2\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 5\\ -9 & -12\end{pmatrix}.$$

Prof. Gabriel Necula, Breaza

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 26.02.2017 –

CLASA A XII-A

Subiecte

1. **a.** Calculaţi: $I_1 = \int \frac{\cos x}{e^{-x} + \sin x + \cos x} dx$ și $I_2 = \int \frac{e^{-x} + \sin x}{e^{-x} + \sin x + \cos x} dx$;

b.Fie funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ și $F : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa. Dacă

$\left(e^{-x} + \sin x + \cos x\right) F(x) = \cos x - x\left(e^{-x} + \sin x + \cos x\right) f(x)$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

determinaţi funcția f.

Prof. Gabriel Necula, Breaza

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup de element neutru e şi cu proprietatea că există $a, b \in G \setminus \{e\}$, astfel încât

$a \neq b, a^2 = b^2 = e$ și $(ab)^2 = ba$.

a.Arătați că:

(i) $(G,\cdot)$ nu este grup abelian;

(ii) Ordinul lui G este cel puțin egal cu 6.

b.Dați exemplu de un grup finit cu proprietatea din enunț și cu ordinul mai mare decat 6.

Prof. Cezar Apostolescu, Ploieşti

3. **a.**Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^{2017}$.Demonstrați că există o primitivă G a sa, astfel încât $|G(x) - g(x)| > 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b.Determinați funcția continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât există F o primitivă a sa, cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există un interval mărginit I_n cu $0 < |F(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$, oricare ar fi $x \in I_n$.

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

4. Calculați $\lim_{n \to \infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} dx \right)^n$.

Prof. Ovidiu Avramescu, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.