OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.01.2016 –

CLASA A V-A

Subiecte

1. În relația 1*2*3*4*...*2014=2016 putem înlocui o parte dintre steluțe cu semnul $+$, iar cele rămase cu semnul $-$ astfel încât să obținem o propoziție adevărată? Justificați răspunsul!

Prof. Gh. Crăciun, Ploiești

2. Arătați că numărul $N=13^{997}+13^{998}+13^{999}+...+13^{2016}$ se divide cu 427.

Prof. Adelina Apostol, Ploieşti

3. Aflați câtul și restul împărțirii numărului $5\cdot 2^{2016}$ la numărul $3\cdot 2^{2015}$.

Prof. Gh Achim, Mizil

4. Fie numărul $A=57\cdot 7^{2016}$.

a) Arătați că există numerele naturale x, y și z astfel încât $A=7^{x}+7^{y}+7^{z}$.

b) Aflați restul împărțirii numărului A la 342.

Prof. Gh. Bumbăcea, Bușteni

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *2 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.01.2016 –

CLASA A VI-A

Subiecte

1. Fie $A=\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 10a+b \text{ se divide cu } 19\}$ și $B=\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 2015a+2b \text{ se divide cu } 19\}$.

Arătați că $A=B$.

Gazeta Matematică

2. Determinați $n\in\mathbb{N}^*$, $n\le 2016$ cu proprietatea că numărul

$N=3^{n+2}+2\cdot 3^n+2\cdot 3^{n-1}+\cdots+2\cdot 3+3$ este pătrat perfect .

Prof Soare Roxana, Ploiești

3. **a**. Arătați că numerele naturale care au exact trei divizori sunt pătrate perfecte.

b. Determinați numărul natural care are numai trei divizori , știind că suma divizorilor săi este 1723.

Prof. Achim Gheorghe, Mizil

4. a. Aflați unghiul format de orarul și minutarul unui ceas mecanic la ora 10:00.

b. Aceeași cerință pentru ora 10:05.

Prof.Țaga Gabriel, Ploiești

SUCCES!

__Notă:__

Timp de lucru : *2 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.01.2016 –

CLASA A VII-A

Subiecte

1. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația:

$$\frac{2x-1}{2016}+\frac{2x-3}{2014}+\frac{2x-5}{2012}+\frac{2x-7}{2010}+...+\frac{2x-2011}{6}+\frac{2x-2013}{4}+\frac{2x-2015}{2}=$$

$$=\frac{2x-2016}{1}+\frac{2x-2014}{3}+\frac{2x-2012}{5}+\frac{2x-2010}{7}+...+\frac{2x-6}{2011}+\frac{2x-4}{2013}+\frac{2x-2}{2015}.$$

Prof. Maria și Anton Negrilă, Ploiești

2. a)Aflați numărul întreg n, știind că fracția $\frac{5n-1}{4n+9}$ și inversa sa sunt simultan numere întregi.

b)Fie mulțimea $A=\left\{\frac{2019}{3},\frac{2020}{4},\frac{2021}{5},...,\frac{3015}{999}\right\}$. Aflați cardinalul mulțimii $A\cap\mathbb{N}$.

***

3. Fie triunghiul dreptunghic *ABC* cu $m(\measuredangle A)=90^o$ și O un punct pe înălțimea AD. Paralela prin O la AB intersectează BC în punctul M. Dacă $N\in AB$, cu A între N și B, arătați că AMON este paralelogram dacă și numai dacă $CO\perp ON$.

Prof. Ion Lupea, Ploieşti și prof. Ion Tomescu, Mizil

4. Se consideră triunghiul ABC isoscel cu $AB=AC$ şi $m\left(\measuredangle BAC\right)=20^o$ si se construieşte triunghiul BCD isoscel cu $BC=CD$ şi $m\left(\measuredangle CBD\right)=20^o$. Demonstrați că $AB=BC+BD$.

Prof. Silvia şi Ionel Brabeceanu, Plopeni

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.01.2016 –

CLASA A VIII-A

Subiecte

1. Fie x, y două numere rationale pentru care avem $2 \le x \le 6$ și $-6 \le y \le 2$.
Arătați că valoarea numărului $a = \sqrt{(3x+2y-22)^2} + |x-y| + \sqrt{(2x+3y+14)^2}$ este pătratul unui număr rational care nu depinde de x și y.

Prof. Maria și Anton Negrilă, Ploiești

2. Fie fracțiile de forma $\frac{x+2016}{2016x+1}, x \in \mathbb{N}$. Determinați cel mai mic număr x pentru care fracția dată se simplifică prin 2015.

Prof. Gheorghe Achim , Mizil

3. Fie paralelogramul $ABEF$ cu $AF = \frac{32\sqrt{3}}{3}cm$ și $m(\measuredangle AFE) = 60^0$ și trapezul $ABCD$ situate în plane diferite. Știind că $AB \parallel CD, AC \cap BD = \{O\}$, $AB = 21cm, \mathrm{CD} = 7cm, BC = 15cm, AD = 13cm$ și înălțimea trapezului este perpendiculară pe AF, aflați distanța de la O la planul (DEF).

Prof. Ion Lupea, Ploieşti și prof. Ion Tomescu, Mizil

4. Fie tetraedrul regulat $ABCD$ de latură $3\sqrt{3}cm$ și punctele M, N, P, Q pe muchiile AB, BC, CD, DA astfel încât $AM = BN = CP = DQ = \sqrt{3}cm$. Știind că $MN \parallel AA'$, unde A' este mijlocul lui BC, rezolvați cerințele :

a. arătați că $MN = MQ$;

b. demonstrați că $NQ \perp (MOP)$, unde O este mijlocul lui NQ;

c. calculați distanța de la punctul N la planul (MOP).

Prof . Bilciurescu Ion , Boldești-Scăeni

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.01.2016 –

CLASA A IX-A

Subiecte

1. Fie $a \in (0,\infty)$ și ecuatia $[x]+\{ax\}=2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

a. Rezolvați ecuația din enunț pentru $a=\sqrt{2}$;

b. Arătați că ecuația din enunț are soluție dacă și numai dacă $a \in \left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{2}{3},\infty\right)$.

Prof. Cezar Apostolescu,Ploiești

2. Determinați $a,b,c \in \mathbb{R}$ știind că $a^4+20 \le 7b^2+4c$, $b^4+20 \le 7c^2+4a$, $c^4+20 \le 7a^2+4b$.

Prof. Petre Năchilă, Ploiești

3. Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi , arătați că :

$$\frac{4}{3} < \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} < 2$$

Prof. Emil Vasile ,Ploiești

4. Se consideră triunghiul ABC, *G*- centrul său de greutate şi *T* un punct interior oarecare. Se notează cu G_1, G_2, G_3 și G_T centrele de greutate ale triunghiurilor TBC, TAC, TAB respectiv $G_1G_2G_3$. Arătați că :

a. Dacă $T=G$, atunci $T=G_T$

b. Dacă $T \ne G$, atunci *T*, G_T și *G* sunt coliniare și $TG_T = 2GG_T$.

Prof. Claudiu Militaru , Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.01.2016 –

CLASA A X-A

Subiecte

1. Fie $a,b\in\mathbb{C}$ și funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definită prin $f(z)=z^2+a|z|+b$

i) Determinați $a,b\in\mathbb{C}$ astfel încât $f(1)=f(2)=0$.

ii) Pentru $a=-3,\ b=2$, aflați toate numerele complexe z cu $f(z)=0$.

Gazeta Matematică

2. Arătați că dacă $a,b,c>1$ astfel încât $a+b+c=6$, atunci are loc inegalitatea :

$$\frac{log_{a+b}^2(b+c)}{c+a}+\frac{log_{b+c}^2(c+a)}{a+b}+\frac{log_{c+a}^2(a+b)}{b+c}\geq\frac{3}{4}$$

Prof. Roxana Soare, Ploiești

3. Fie functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietățile :

(i) f impară;

(ii) f injectivă;

(iii) $f_3(x)=f_2(x)-f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde $f_n(x)=\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{\text{de } n \text{ ori}}(x)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a. Arătați că $\mathbf{f_6(x)=x}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b. Demonstrați că f este surjectivă.

c. Demonstrați că $\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât $\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot f^{-1}(x)=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Prof. Vasile Coman, Vălenii de Munte

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(a+ib)=[a]+i[b]$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui numărului real x.

a) Fie ABC un triunghi în planul complex și z_A,z_B,z_C afixele vărfurilor , iar G centrul de greutate de afix z_G. Arătați că, dacă $f(z_A)=f(z_B)=f(z_C)$, atunci $f(z_G)=f(z_A)$.

b) Calculați $f(z_1)+f(z_2)+...+f(z_{2016})$, unde $z_1,z_2,...z_{2016}$ sunt rădăcinile de ordin 2016 ale unității.

Prof. Emil Vasile, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.01.2016 –

CLASA A XI-A

Subiecte

1. Fie $\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos^2 nx & \sin 2nx & \cos 2nx \\ \cos^2 ny & \sin 2ny & \cos 2ny \\ \cos^2 nz & \sin 2nz & \cos 2nz \end{vmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*,\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că $|\Delta_n| < 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*,\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

Prof. Vasile Coman, Valenii de Munte

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -3 & 11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Definim șirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = tr(A^n), n \geq 1$ cu $a_0 = tr(I_2)$.

Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (unde $tr\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$ reprezintă urma matricei $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$).

Prof. Gabriel Necula, Breaza

3. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 > 0$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n + a^2} - a,\ n \geq 0$, unde $a \geq \frac{1}{2}$. Fie $b_n = na_n$.

Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Prof. Petre Năchilă, Ploieşti

4. Pentru $a, b \in \mathbb{R}^*$ considerăm șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_1 = a,\ x_2 = b$ și

$$x_n = \begin{cases} x_1 + x_3 + \ldots + x_{n-2},\ n\ impar, n \geq 3 \\ x_2 + x_4 + \ldots + x_{n-2},\ n\ par, n \geq 4 \end{cases}.$$

Determinați $\frac{a}{b}$ știind că șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent, unde $y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{2}^n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.01.2016 –

CLASA A XII-A

Subiecte

1. Calculați: $\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2}dx, \quad x>0$

***

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup, de element neutru e, cu proprietatea că există $a,b \in G$ astfel încât $a^2, b^2 \neq e$ si $x^2 = e, (\forall) x \in G \setminus \{a,b\}$.

a) Arătați ca $a^3 = b^3 = e$ sau $a^4 = b^4 = e$;

b) Dați un exemplu de un grup finit cu proprietatea din enunț pentru care $a^3 = b^3 = e$, respectiv pentru care $a^4 = b^4 = e$.

Prof. Cezar Apostolescu, Ploiești

3. Fie $f:(0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sqrt{[x]}+\sqrt{\{x\}}}{\sqrt{x}}$, unde $[x],\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x. Cercetați existența primitivelor pe domeniul de definiție al funcției f.

Prof. Dan Isbășoiu, U.P.G. Ploiesti

4. a)Considerăm funcțiile $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferite , care admit primitive. Fie F,G primitive ale funcțiilor f, respectiv g și $\overline{f}(x) = [F(x)],\ \overline{g}(x) = [G(x)],\quad \overline{f},\overline{g}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}.$ Arătați că dacă $\{f(x)\} = \{g(x)\}$, atunci $\overline{f}$ și $\overline{g}$ sunt diferite ($[x],\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x).

b)Dacă H este o primitivă a funcției $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $[H(x)] = [x^2]$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, arătați că există $\alpha \in \mathbb{R}$ cu $h(\alpha) = 2\alpha.$

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.